

CONTRE-EXEMPLES AU PRINCIPE DE HASSE POUR CERTAINS TORES COFLASQUES

par

R. de la Bretèche & T.D. Browning

Résumé. — Nous étudions le comportement asymptotique du nombre de variétés dans une certaine classe ne satisfaisant pas le principe de Hasse. Cette étude repose sur des résultats récemment obtenus par Colliot-Thélène [3].

1. Introduction

Nous nous intéressons à la fréquence de contre-exemples au principe de Hasse dans une famille de variétés algébriques définies sur \mathbb{Q} . Les courbes de degré 3 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2$ sont l'objet du travail de Bhargava [1]. Le cas des surfaces de Châtelet a été récemment étudié par La Bretèche et Browning [2].

Le but de cet article est de faire de même pour les variétés affines $Y \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^6$, définies par

$$(x^2 - ay^2)(z^2 - bt^2)(u^2 - abw^2) = c, \quad (1.1)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$. L'arithmétique de Y a été étudiée par Colliot-Thélène [3, §5], qui a notamment montré que le choix de coefficients $(a, b, c) = (13, 17, 5)$ donne un contre-exemple au principe de Hasse. Notre investigation quantitative est fondée sur son travail.

La variété Y est un espace principal homogène du tore coflasque

$$(x^2 - ay^2)(z^2 - bt^2)(u^2 - abw^2) = 1.$$

D'après un résultat de Sansuc [5, Cor. 8.7], l'obstruction Brauer–Manin est la seule obstruction au principe de Hasse. Soit Y^c une \mathbb{Q} -compactification lisse de Y et $\overline{Y^c} = Y^c \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$. Une caractéristique intéressante de Y est le fait qu'il existe un générateur universel explicite pour le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(Y^c)/\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) = H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \mathrm{Pic}(\overline{Y^c}))$.

En fait, suite à [3, Thm. 4.1], si $a, b, ab \in \mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}^{*2}$ on a $\mathrm{Br}(Y^c)/\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec l'algèbre de quaternions $(x^2 - ay^2, b) \in \mathrm{Br}(\mathbb{Q}(Y))$ comme générateur, tandis que, si l'un des a, b, ab est dans \mathbb{Q}^{*2} , Y est \mathbb{Q} -rationnelle, et donc $\mathrm{Br}(Y^c)/\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) = 0$. Nous utilisons cette

description explicite pour déterminer la fréquence à laquelle il existe des contre-exemples au principe de Hasse pour les variétés (1.1).

Nous paramétrons les variétés Y par l'ensemble

$$S = \{(a, b, c) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^3 : a, b, c \text{ sans facteur carré et } c > 0\}. \quad (1.2)$$

Il est évident que toute \mathbb{Q} -variété (1.1) est \mathbb{Q} -isomorphe à la variété définie par la même équation avec $(a, b, c) \in S$. Notre intérêt principal est de déterminer la répartition des éléments de S tels que $Y(\mathbb{Q})$ est vide (ou non-vide). À la lumière de [3, Prop. 5.1(a)], pour toute place v de \mathbb{Q} et chaque $(a, b, c) \in S$, on a $Y(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$. Il n'y a donc jamais d'obstruction locale pour l'existence de \mathbb{Q} -points.

Soit $S(P) = \{(a, b, c) \in S : \max\{|a|, |b|, c\} \leq P\}$, pour $P \geq 1$. Nous estimons asymptotiquement, lorsque P tend vers l'infini, le cardinal

$$N_{\text{Br}}(P) = \#\{(a, b, c) \in S(P) : Y(\mathbb{Q}) = \emptyset\}.$$

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.1. — *Lorsque $P \geq 2$, on a*

$$N_{\text{Br}}(P) = \frac{\tau_1 P^3}{\log P} - \frac{\tau_2 P^3}{(\log P)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{P^3}{(\log P)^2}\right),$$

où

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{45}{\pi^5} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{2p(p+1)}\right) + \frac{15}{\pi^5} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2p(p+1)}\right), \\ \tau_2 &= \frac{153}{16\pi^{\frac{7}{2}}} \prod_p \frac{(1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{1}{p})} \left(1 + \frac{3}{2p} + \frac{1}{p^2}\right). \end{aligned}$$

La différence $N_{\text{glob}}(P) = \#S(P) - N_{\text{Br}}(P)$ est le nombre de variétés Y paramétrées par $S(P)$ pour lesquelles $Y(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Le cardinal $\#S(P)$ étant facile à estimer, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 1.2. — *Lorsque $P \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned} N_{\text{glob}}(P) &= \#S(P) + O\left(\frac{P^3}{\log P}\right) \\ &= \frac{864}{\pi^6} P^3 + O\left(\frac{P^3}{\log P}\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a une proportion asymptotique de 100% des variétés Y qui ont des \mathbb{Q} -points.

Remerciements. — Pendant l'élaboration de cet article, le premier auteur a été soutenu par un *IUF junior* et le *projet ANR (PEPR)*, tandis que le second auteur a été soutenu par la bourse *ERC 306457*.

2. L'obstruction Brauer–Manin

Nous rappelons quelques points clés du travail de Colliot-Thélène [3], sur les variétés Y définies en (1.1), lorsque (a, b, c) appartient à l'ensemble S défini en (1.2).

Selon [3, Prop. 5.1(c)], on a $Y(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ s'il existe un nombre premier p tel qu'aucun des a, b, ab ne soit pas un carré dans \mathbb{Q}_p^* . Supposons que pour chaque premier p l'un au moins des a, b ou ab est un carré dans \mathbb{Q}_p^* , alors il découle de [3, Prop. 5.1(d)] que $Y(\mathbb{Q}) = \emptyset$ si, et seulement si,

$$\sum_{\substack{p \\ a \notin \mathbb{Q}_p^{*2}}} [c, b]_p \equiv 1 \pmod{2}.$$

Ici $[\cdot, \cdot]_p : \mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est défini par $(\cdot, \cdot)_p = (-1)^{[\cdot, \cdot]_p}$, où $(\cdot, \cdot)_p$ est le symbole de Hilbert.

Lorsque $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, nous considérons

$$f(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a, b \text{ ou } ab \text{ est dans } \mathbb{Q}_p^{*2} \text{ pour tout } p, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$h(a, b, c) = \prod_{\substack{p \\ a \notin \mathbb{Q}_p^{*2}}} (c, b)_p. \quad (2.1)$$

Notre problème est donc d'évaluer, lorsque P tend vers l'infini, la quantité

$$\begin{aligned} N_{\text{Br}}(P) &= \sum_{(a,b,c) \in S(P)} \frac{f(a, b)}{2} (1 - h(a, b, c)) \\ &= \frac{1}{2} (N_1(P) - N_2(P)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

où les définitions de $N_1(P)$ et $N_2(P)$ sont évidentes. Notre analyse de $N_1(P)$ et $N_2(P)$ est inspirée du travail de Friedlander et Iwaniec [4].

Nous commençons avec l'observation

$$N_1(P) = \sum_{(a,b,c) \in S(P)} f(a, b) = \left(\sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \\ |a|, |b| \leq P}} \mu^2(a) \mu^2(b) f(a, b) \right) \left(\sum_{1 \leq c \leq P} \mu^2(c) \right),$$

où μ est la fonction de Möbius. Nous étendons la définition de la fonction μ de telle sorte que $\mu(0) = 0$. Le deuxième facteur est facile à estimer. Il vient

$$N_1(P) = \frac{6P}{\pi^2} \sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \\ |a|, |b| \leq P}} \mu^2(a) \mu^2(b) f(a, b) + O(P^{\frac{5}{2}}). \quad (2.3)$$

Il est clair que l'un au moins des a, b ou ab est un carré dans \mathbb{Q}_p^* pour chaque premier $p \nmid 2ab$. Quand $p = 2$ et ab est impair, la condition relative à $p = 2$ contenue dans $f(a, b)$

est que l'un au moins des a, b or ab est congru à 1 modulo 8. Rappelant que a, b sont des entiers sans facteur carré, nous avons alors l'égalité

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f_2(a, b) \prod_{\substack{p|a \\ p \nmid 2b}} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b}{p} \right) \right) \prod_{\substack{p|b \\ p \nmid 2a}} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{p} \right) \right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{p|\gcd(a,b) \\ p \neq 2}} \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{ab/(a,b)^2}{p} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec

$$f_2(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } 2 \nmid ab \text{ et } 1 \in \{a, b, ab\} \pmod{8}, \\ 1, & \text{si } 2 \mid a \text{ et } b \equiv 1 \pmod{8}, \\ 1, & \text{si } 2 \mid b \text{ et } a \equiv 1 \pmod{8}, \\ 1, & \text{si } 2 \mid (a, b), ab \equiv 4 \pmod{32}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ϑ défini sur les impairs par $\vartheta(k) = 1$ si $k \equiv 3 \pmod{4}$ et $\vartheta(k) = 0$ si $k \equiv 1 \pmod{4}$, la loi de réciprocité quadratique s'énonce, lorsque k et ℓ sont des nombres entiers impairs premiers entre eux, sous la forme

$$\left(\frac{k}{\ell} \right) \left(\frac{\ell}{k} \right) = (-1)^{\vartheta(k)\vartheta(\ell)}. \quad (2.5)$$

Nous terminons cette section par quelques mots sur les symboles de Hilbert (cf. [6, §3]). Soit p un nombre premier et $x, y \in \mathbb{Q}_p^*$. Supposant que $x = p^\xi u$ et $y = p^\eta v$, où u, v sont des p -unités, alors pour tout $p > 2$ nous avons

$$(x, y)_p = (-1)^{\xi\eta\vartheta(p)} \left(\frac{u}{p} \right)^\eta \left(\frac{v}{p} \right)^\xi, \quad (2.6)$$

tandis que lorsque $p = 2$, nous avons

$$(x, y)_2 = (-1)^{\vartheta(u)\vartheta(v) + \frac{\xi(v^2-1)}{8} + \frac{\eta(u^2-1)}{8}}. \quad (2.7)$$

3. Lemmes techniques

Lorsque $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, nous considérons

$$\varphi_\nu(r) = \prod_{p|r} \left(1 + \frac{\nu}{2p} \right)^{-1}.$$

Nous aurons besoin de [4, Cor. 2], concernant

$$C_\nu(x; a, d, r, q, \chi) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,d)=1 \\ n \equiv a \pmod{r}}} \frac{\mu^2(n)\chi(n)}{2^{\omega(n)}} \varphi_\nu(n),$$

où χ est un caractère modulo q et $\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers distincts de n . Posons

$$c_\nu(r) = c_\nu(1) \prod_{p|r} \left(1 + \frac{\varphi_\nu(p)}{2p}\right)^{-1},$$

avec

$$c_\nu(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \left(1 + \frac{\varphi_\nu(p)}{2p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons aussi δ la fonction caractéristique des caractères principaux.

Lemme 3.1. — Soient $A > 0$ fixé et $\nu \in \{0, 1, 2\}$. Lorsque a, d, r, q sont des entiers satisfaisant $(a, r) = (d, rq) = (r, q) = 1$, $x \geq 2$ et χ est un caractère modulo q , on a

$$C_\nu(x; a, d, r, q, \chi) = \delta(\chi) \frac{c_\nu(drq)}{\varphi(r)} \frac{x}{\sqrt{\log x}} \left\{ 1 + O\left(\frac{(\log 3drq)^{\frac{3}{2}}}{\log x}\right) \right\} + O\left(\frac{\tau(d)rqx}{(\log x)^A}\right).$$

Démonstration. — Dans [4, Cor. 2], ce résultat est démontré pour $\nu = 0$, la condition supplémentaire $(a, q) = 1$ étant inutile. Les cas $\nu = 1, 2$ se démontrent de la même manière. \square

Soient $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$. Du Lemme 3.1, nous déduisons l'estimation de la somme

$$Q(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{d}, r, \mathbf{q}, \chi_1, \chi_2) = \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \\ n_i \leq x_i \\ (n_i, d_i) = 1, (n_1, n_2) = 1 \\ n_i \equiv a_i \pmod{r}}} \mu^2(n_1 n_2) \frac{\chi_1(n_1) \chi_2(n_2)}{2^{\omega(n_1 n_2)}},$$

où les χ_i sont des caractères modulo q_i .

Corollaire 3.2. — Soit $A > 0$ fixé. Lorsque $a_1, a_2, d_1, d_2, r, q_1, q_2$ sont des entiers satisfaisant $(a_i, r) = (d_i, q_i) = (r, d_1 d_2 q_1 q_2) = 1$, $x_i \geq 2$ et χ_i sont des caractères modulo q_i , on a

$$Q(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{d}, r, \mathbf{q}, \chi_1, \chi_2) = \delta(\chi_1) \delta(\chi_2) \frac{c(\mathbf{d}, r)}{\varphi(r)^2} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{\log x_1 \log x_2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{(\log 3d_1 d_2 r q_1 q_2)^{\frac{3}{2}}}{\log \min\{x_1, x_2\}}\right) \right\} \\ + O\left(\frac{\tau(d_1 d_2) r q_1 q_2 x_1 x_2}{(\log \min\{x_1, x_2\})^A}\right),$$

avec

$$c(\mathbf{d}, r) = \frac{6}{\pi^3} \frac{\varphi_1(d_1 r) \varphi_1(d_2 r)}{\varphi_1(d_1 d_2 r)^2} \varphi_2(d_1 d_2 r).$$

Démonstration. — Notons Q la quantité à estimer. Une intervention de Möbius fournit

$$Q = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ (n, d_1 d_2 r q_1 q_2) = 1}} \frac{\mu(n) \chi_1(n) \chi_2(n)}{4^{\omega(n)}} C_0\left(\frac{x_1}{n}; n^{-1} a_1, d_1 n, r, q_1, \chi_1\right) C_0\left(\frac{x_2}{n}; n^{-1} a_2, d_2 n, r, q_2, \chi_2\right).$$

Nous pouvons restreindre la sommation aux entiers $n \leq T$ où $T = (\log \min\{x_1, x_2\})^{\frac{A}{2}}$, la contribution complémentaire étant majorée par $O(x_1 x_2 / T)$. Nous appliquons ensuite le Lemme 3.1 avec $\nu = 0$. Il vient

$$\begin{aligned} Q &= \delta(\chi_1)\delta(\chi_2) \sum_{\substack{n \leq T \\ (n, d_1 d_2 r) = 1}} \frac{\mu(n) c_0(d_1 n r) c_0(d_2 n r) x_1 x_2}{4^{\omega(n)} n^2 \varphi(q)^2 \sqrt{\log x_1 \log x_2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{(\log 3 d_1 d_2 r q_1 q_2)^{\frac{3}{2}}}{\log(\min\{x_1, x_2\})}\right) \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{\tau(d_1 d_2) r q_1 q_2 x_1 x_2 T}{(\log(\min\{x_1, x_2\}))^A} + \frac{x_1 x_2}{T}\right) \\ &= \delta(\chi_1)\delta(\chi_2) \frac{c(\mathbf{d}, r) x_1 x_2}{\varphi(q)^2 \sqrt{\log x_1 \log x_2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{(\log 3 d_1 d_2 r q_1 q_2)^{\frac{3}{2}}}{\log \min\{x_1, x_2\}}\right) \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{\tau(d_1 d_2) r q_1 q_2 x_1 x_2}{(\log \min\{x_1, x_2\})^{\frac{A}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Ici nous avons

$$\begin{aligned} c(\mathbf{d}, r) &= c_0(d_1 r) c_0(d_2 r) \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ (n, d_1 d_2 r) = 1}} \frac{\mu(n) \varphi_1(n)^2}{4^{\omega(n)} n^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \varphi_1(d_1 r) \varphi_1(d_2 r) \prod_{p|d_1 d_2 r} \left(1 - \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{-1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \\ &= \frac{6}{\pi^3} \varphi_1(d_1 r) \varphi_1(d_2 r) \frac{\varphi_2(d_1 d_2 r)}{\varphi_1(d_1 d_2 r)^2}, \end{aligned}$$

ce qui fournit donc le résultat quitte à modifier la valeur du paramètre A . \square

Lorsque $q_1 q_2$ est grand, le Corollaire 3.2 est inutilisable. Nous aurons besoin ainsi du résultat suivant [4, Lemme 2].

Lemme 3.3. — Soient $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes telles que $|\alpha_m|, |\beta_n| \leq 1$, dont le support est inclus dans les nombres impairs. Lorsque $M, N \geq 1$, on a

$$\sum_{m \leq M} \sum_{n \leq N} \alpha_m \beta_n \left(\frac{n}{m}\right) \ll (MN^{\frac{5}{6}} + NM^{\frac{5}{6}})(\log 3MN)^{\frac{7}{6}}.$$

4. Étude de $N_1(P)$

Pour estimer $N_1(P)$ à partir de (2.3), nous considérons

$$T(P) = \sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \\ |a|, |b| \leq P}} \mu^2(a) \mu^2(b) f(a, b).$$

Lorsque $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{\pm 1\}^2$ et $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, nous notons $T(P; \alpha, \beta, \boldsymbol{\varepsilon})$ la contribution dans $T(P)$ des couples (a, b) tels que $2^\alpha \parallel a$ et $2^\beta \parallel b$, $\varepsilon_1 a > 0$, $\varepsilon_2 b > 0$. Les couples $(a2^{-v_2(a)}, b2^{-v_2(b)})$ appartiennent à un ensemble $E_{\alpha, \beta}$ modulo 8, avec

$$\begin{aligned} E_{0,0} &= \{(1, \pm 1), (1, \pm 3), (-1, \pm 1), (\pm 3, 1), (\pm 3, \pm 3)\}, \\ E_{1,0} &= \{(\pm 1, 1), (\pm 3, 1)\}, \\ E_{0,1} &= \{(1, \pm 1), (1, \pm 3)\}, \\ E_{1,1} &= \{(\pm 1, \pm 1), (\pm 3, \pm 3)\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Lorsque $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^2$ et $(a2^{-\alpha}, b2^{-\beta}) \equiv (a_0, b_0) \pmod{8}$ avec $(a_0, b_0) \in E_{\alpha, \beta}$, $\varepsilon_1 a > 0$, et $\varepsilon_2 b > 0$, la formule (2.4) s'écrit aussi

$$\mu^2(a)\mu^2(b)f(a, b) = \sum_{\substack{(k, k', \ell, \ell', m, m') \in \mathbb{N}^6 \\ a = \varepsilon_1 2^\alpha k k' m m' \\ b = \varepsilon_2 2^\beta \ell \ell' m m'}} \frac{\mu^2(2k k' m m' \ell \ell')}{2^{\omega(k k' \ell \ell' m m')}} \left(\frac{b}{k}\right) \left(\frac{a}{\ell}\right) \left(\frac{ab/(a, b)^2}{m}\right). \quad (4.2)$$

Il vient

$$\begin{aligned} T(P; \alpha, \beta, \boldsymbol{\varepsilon}) &= \sum_{(a_0, b_0) \in E_{\alpha, \beta}} \sum_{\substack{(k, k', \ell, \ell', m, m') \in \mathbb{N}^6 \\ 2^\alpha k k' m m', 2^\beta \ell \ell' m m' \leq P \\ (\varepsilon_1 k k' m m', \varepsilon_2 \ell \ell' m m') \equiv (a_0, b_0) \pmod{8}}} \frac{\mu^2(2k k' m m' \ell \ell')}{2^{\omega(k k' \ell \ell' m m')}} \\ &\quad \times \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta \ell \ell' m m'}{k}\right) \left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha k k' m m'}{\ell}\right) \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 2^{\alpha+\beta} k k' \ell \ell'}{m}\right). \end{aligned}$$

La loi de réciprocité quadratique (2.5) et la multiplicativité des caractères fournissent

$$\left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta \ell \ell' m m'}{k}\right) \left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha k k' m m'}{\ell}\right) \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 2^{\alpha+\beta} k k' \ell \ell'}{m}\right) = u \left(\frac{\ell'}{k}\right) \left(\frac{k'}{\ell}\right) \left(\frac{\ell' k'}{m}\right) \left(\frac{m'}{k \ell}\right), \quad (4.3)$$

avec

$$u = u(k, \ell, m) = (-1)^{\vartheta(k)\vartheta(\ell) + \vartheta(k)\vartheta(m) + \vartheta(m)\vartheta(\ell)} \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta}{k m}\right) \left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha}{\ell m}\right). \quad (4.4)$$

Un calcul simple fournit le résultat suivant.

Lemme 4.1. — Lorsque $(k, \ell) \equiv (k_0, \ell_0) \pmod{8}$ et $(\varepsilon_1 k_0 m, \varepsilon_2 \ell_0 m) \in E_{\alpha, \beta}$, on a

$$u(k, \ell, m) = (-1)^{\vartheta(\varepsilon_1 k_0 m)\vartheta(\varepsilon_2 \ell_0 m) + \vartheta(\varepsilon_1)\vartheta(\varepsilon_2) + \vartheta(m)}.$$

Démonstration. — Nous avons toujours

$$\left(\frac{2^\beta}{k_0 m}\right) \left(\frac{2^\alpha}{\ell_0 m}\right) = 1.$$

En effet, le cas $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ étant trivial, regardons le cas $(\alpha, \beta) = (1, 0)$. Il découle de (4.1) que $\varepsilon_2 \ell_0 m \equiv 1 \pmod{8}$ ce qui montre la formule dans ce cas. Les raisonnements

sont identiques pour $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ ou $(1, 1)$. Nous avons donc bien l'expression attendue. Comme

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{km}\right) \left(\frac{\varepsilon_1}{\ell m}\right) = (-1)^{\vartheta(k_0 m)\vartheta(\varepsilon_2) + \vartheta(\ell_0 m)\vartheta(\varepsilon_1)},$$

nous avons

$$\begin{aligned} u(k, \ell, m) &= (-1)^{\vartheta(k)\vartheta(\ell) + \vartheta(k)\vartheta(m) + \vartheta(m)\vartheta(\ell) + \vartheta(k_0 m)\vartheta(\varepsilon_2) + \vartheta(\ell_0 m)\vartheta(\varepsilon_1)} \\ &= (-1)^{\vartheta(\varepsilon_1 k_0 m)\vartheta(\varepsilon_2 \ell_0 m) + \vartheta(\varepsilon_1)\vartheta(\varepsilon_2) + \vartheta(m)}, \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat recherché. \square

Nous reprenons la démarche développée dans [4]. Pour cela, nous considérons

$$V = (\log P)^B,$$

où B est un paramètre qui sera choisi suffisamment grand en fonction de la valeur de A prise dans les applications du Corollaire 3.2.

La contribution à $T(P; \alpha, \beta, \varepsilon)$ des couples d'entiers (a, b) tels que $mm' > V$ est $\ll P^2/V$. Dorénavant, nous nous restreignons au cas $mm' \leq V$.

La contribution à $T(P; \alpha, \beta, \varepsilon)$ des couples d'entiers (a, b) tels que $k \leq V$ et $k' \leq V$ est $\ll PV^2 \log P$. De même lorsque $\ell \leq V$ et $\ell' \leq V$.

Grâce au Lemme 3.3, du fait de la présence du facteur $(\frac{\ell'}{k})$, la contribution du cas $\ell' > V$ et $k > V$ est

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{mm' \leq V} \sum_{\ell \leq P/(mm'V)} \sum_{k' \leq P/(mm'V)} \frac{P^2}{mm'k'\ell} \left\{ \left(\frac{P}{mm'\ell}\right)^{-\frac{1}{6}} + \left(\frac{P}{mm'k'}\right)^{-\frac{1}{6}} \right\} (\log P)^{\frac{7}{6}} \\ &\ll P^2 V^{-\frac{1}{6}} (\log P)^{\frac{13}{6}} (\log V)^2, \end{aligned}$$

ce qui suffit lorsque $B > 25$. Nous avons la même majoration lorsque $\ell > V$ et $k' > V$ grâce à la présence du facteur $(\frac{k'}{\ell})$.

Il nous reste à traiter le cas $k, \ell \leq V$ ou $k', \ell' \leq V$. Dans le premier cas, nous sommes amenés à considérer lorsque $(\varepsilon_1 mm' k k_0', \varepsilon_2 mm' \ell \ell_0') \in E_{\alpha, \beta}$ la somme

$$T_{k, \ell}(k_0', \ell_0', m, m') = \sum_{\substack{(k', \ell') \in \mathbb{N}^2 \\ k' \leq P/(2^\alpha mm' k), \ell' \leq P/(2^\beta mm' \ell) \\ (k', \ell') = (k' \ell', mm' k \ell) = 1 \\ (k', \ell') \equiv (k_0', \ell_0') \pmod{8}}} \frac{\mu^2(k')}{2^{\omega(k')}} \frac{\mu^2(\ell')}{2^{\omega(\ell')}} \left(\frac{\ell'}{km}\right) \left(\frac{k'}{\ell m}\right),$$

alors que, dans le deuxième cas, nous estimerons lorsque $(\varepsilon_1 mm' k_0 k', \varepsilon_2 mm' \ell_0 \ell') \in E_{\alpha, \beta}$ la somme

$$T'_{k', \ell'}(k_0, \ell_0, m, m') = \sum_{\substack{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \\ k \leq P/(2^\alpha mm' k'), \ell \leq P/(2^\beta mm' \ell') \\ (k, \ell) = (k \ell, mm' k' \ell') = 1 \\ (k, \ell) \equiv (k_0, \ell_0) \pmod{8}}} \frac{\mu^2(k)}{2^{\omega(k)}} \frac{\mu^2(\ell)}{2^{\omega(\ell)}} \left(\frac{\ell' m'}{k}\right) \left(\frac{k' m'}{\ell}\right).$$

En effet $u(k, \ell, m) = u(k_0, \ell_0, m)$, lorsque $(k, \ell) \equiv (k_0, \ell_0) \pmod{8}$, ne dépend pas de (k, ℓ) .

Nous avons

$$T_{k,\ell}(k'_0, \ell'_0, m, m') = Q \left(\frac{P}{2^\alpha m m' k}, \frac{P}{2^\beta m m' \ell}; k'_0, \ell'_0, m' k, m' \ell, 8, \ell m, k m, \chi_{\ell m}, \chi_{k m} \right),$$

où $\chi_n(\cdot) = (\frac{\cdot}{n})$. Cette somme peut donc être estimée grâce au Corollaire 3.2. Nous obtenons

$$T_{k,\ell}(k'_0, \ell'_0, m, m') = \frac{\mathbf{1}_{k=\ell=m=1}}{2^{2+\alpha+\beta} \pi^3} \frac{\varphi_2(m')}{m'^2} \frac{P^2}{\log P} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(2m')}{\log P}\right) \right\} + O\left(\frac{P^2 \tau(k\ell)}{(\log P)^A}\right),$$

où nous avons utilisé la formule $c(m', m', 8, 1, 1) = 4\varphi_2(m')/\pi^3$.

De même, posant

$$u'(k_0, \ell_0, m') = (-1)^{\vartheta(\ell_0)\vartheta(k'm') + \vartheta(k_0)\vartheta(\ell'm')},$$

nous obtenons grâce à (2.5)

$$\begin{aligned} T'_{k',\ell'}(k_0, \ell_0, m, m') &= u'(k_0, \ell_0, m') T_{k',\ell'}(k_0, \ell_0, m', m) \\ &= \frac{\mathbf{1}_{k'= \ell' = m' = 1}}{2^{2+\alpha+\beta} \pi^3} \frac{\varphi_2(m)}{m^2} \frac{P^2}{\log P} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(2m)}{\log P}\right) \right\} + O\left(\frac{P^2 \tau(k'\ell')}{(\log P)^A}\right). \end{aligned}$$

Enfin, nous en déduisons

$$\begin{aligned} T(P, \alpha, \beta, \epsilon) &= \frac{1}{\pi^3} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ 2 \nmid m}} \frac{\mu^2(m) \varphi_2(m)}{2^{\omega(m)} m^2} \tau_{\alpha, \beta}(m) \right) \frac{P^2}{\log P} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log P}\right) \right\} \\ &\quad + O\left(P^2 (\log V)^3 \left\{ \frac{V^3}{(\log P)^A} + \frac{(\log P)^{\frac{13}{6}}}{V^{\frac{1}{6}}} \right\} \right), \end{aligned}$$

avec

$$\tau_{\alpha, \beta}(m) = \frac{\#E_{\alpha, \beta}}{2^{\alpha+\beta}} + \sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ (k_0, \ell_0) \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \\ (\epsilon_1 k_0 m, \epsilon_2 \ell_0 m) \in E_{\alpha, \beta} \pmod{8}}} \frac{u(k_0, \ell_0, m)}{2^{2+\alpha+\beta}},$$

où u a été défini en (4.4).

Grâce à (4.1), nous avons

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in \{0, 1\}^2} \frac{\#E_{\alpha, \beta}}{2^{\alpha+\beta}} = 15.$$

Le Lemme 4.1 et les égalités (4.1) fournissent ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{(\alpha, \beta) \in \{0, 1\}^2} \tau_{\alpha, \beta}(m) &= 15 + \sum_{(\alpha, \beta) \in \{0, 1\}^2} \sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ (u_0, v_0) \in E_{\alpha, \beta} \pmod{8}}} \frac{(-1)^{\vartheta(\epsilon_1)\vartheta(\epsilon_2)}}{2^{2+\alpha+\beta}} (-1)^{\vartheta(u_0)\vartheta(v_0) + \vartheta(m)} \\ &= 15 + (-1)^{\vartheta(m)} \sum_{(\alpha, \beta) \in \{0, 1\}^2} \frac{1}{2^{1+\alpha+\beta}} \sum_{(u_0, v_0) \in E_{\alpha, \beta} \pmod{8}} (-1)^{\vartheta(u_0)\vartheta(v_0)} \\ &= 15 + 5(-1)^{\vartheta(m)}. \end{aligned}$$

Un simple calcul fournit

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ 2 \nmid m}} \frac{z^{\vartheta(m)} \mu^2(m) \varphi_2(m)}{2^{\omega(m)} m^2} = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{z^{\vartheta(p)}}{2p(p+1)} \right), \quad (z \in \{\pm 1\}).$$

En choisissant $A = 81$ and $B = 26$, nous obtenons

$$T(P) = C \frac{P^2}{\log P} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log P}\right) \right\},$$

où

$$C = \frac{15}{\pi^3} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{2p(p+1)} \right) + \frac{5}{\pi^3} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{(-1)^{\vartheta(p)}}{2p(p+1)} \right).$$

À partir de (2.3), il vient ainsi

$$N_1(P) = \frac{6C}{\pi^2} \frac{P^3}{\log P} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log P}\right) \right\}. \quad (4.5)$$

5. Étude de $N_2(P)$

Notre objectif dans cette section est d'estimer la somme

$$N_2(P) = \sum_{(a,b,c) \in S(P)} f(a,b) h(a,b,c).$$

Les calculs sont plus compliqués que pour l'estimation de $N_1(P)$ mais relèvent des mêmes méthodes.

Lorsque $f(a,b) \neq 0$, nous aurons besoin d'une expression simple de la fonction $h(a,b,c)$ définie en (2.1). Comme $(c,b)_p = 1$ pour tout nombre premier impair p ne divisant pas bc , nous avons

$$h(a,b,c) = \prod_{\substack{p|2bc \\ a \notin \mathbb{Q}_p^{*2}}} (c,b)_p.$$

Rappelons la définition (1.2) de S . Nous paramétrons les $(a,b,c) \in S$ par

$$a = \varepsilon_1 2^\alpha d_0 d_{12} d_{13} a', \quad b = \varepsilon_2 2^\beta d_0 d_{12} d_{23} b', \quad c = 2^\gamma d_0 d_{13} d_{23} c', \quad (5.1)$$

avec d_{ij} , d_0 , a' , b' , c' des nombres impairs, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ et les conditions de coprimauté

$$(d_{12}, d_{13}) = 1, \quad (d_{12}, d_{23}) = 1, \quad (d_{13}, d_{23}) = 1, \\ (a'b'c', d_{12}d_{13}d_{23}) = (a', b'c') = (b', c') = 1.$$

Nous écrivons $h(a,b,c) = h_1(a,b,c)h_2(a,b,c)$, avec $h_1(a,b,c)$ le produit sur les p impairs et la quantité $h_2(a,b,c)$ désignant le facteur lié à $p = 2$. Les deux résultats suivants concernent leur calcul explicite.

Lemme 5.1. — Lorsque $(a, b, c) \in S$ et $f(a, b) \neq 0$, on a

$$h_1(a, b, c) = \frac{1}{2^{\omega(c')}} \sum_{nn'n''n'''=c'} \tilde{u}\left(\frac{a'}{nn''}\right) \left(\frac{b'}{n'n''d_0d_{13}}\right),$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}(n, n', n'', n''', d_0, d_{12}, d_{13}, d_{23}) \\ &= \mu(n'')(-1)^{\vartheta(d_0d_{12})\vartheta(d_0d_{13}nn')} \left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha d_{13}}{nn''}\right) \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta d_{23}}{n'n''}\right) \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta}{d_0d_{13}}\right) \left(\frac{2^\gamma n''n'''}{d_0d_{12}}\right) \left(\frac{d_{23}}{d_{12}d_{13}}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. — Lorsque a, b, c sont sans facteur carré et $p \mid a$, alors $a \notin \mathbb{Q}_p^{*2}$. De plus, lorsque $p \nmid a$ et $p \mid b$, le fait que $f(a, b) \neq 0$ implique que a est un carré dans \mathbb{Q}_p^* ce qui est exclu. Lorsque $p \nmid a$, nous nous restreignons à $p \nmid b$ et donc $p \mid c$ et $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Ainsi d'après (2.6), nous avons $(c, b)_p = \left(\frac{b}{p}\right)$. Il vient

$$h_1(a, b, c) = \prod_{\substack{p \mid (bc, a) \\ p > 2}} (c, b)_p \prod_{\substack{p \mid c \\ p \nmid 2ab}} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{b}{p}\right) - \left(\frac{ab}{p}\right) \right\}.$$

En développant le produit, nous obtenons

$$h_1(a, b, c) = \frac{1}{2^{\omega(c')}} \prod_{\substack{p \mid (bc, a) \\ p > 2}} (c, b)_p \sum_{nn'n''n'''=c'} \mu(n'') \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{b}{n'}\right) \left(\frac{ab}{n''}\right).$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p \mid (bc, a) \\ p > 2}} (c, b)_p &= \prod_{p \mid d_0} \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{bc/p^2}{p}\right) \prod_{\substack{p \mid (a, b) \\ p \nmid 2c}} \left(\frac{c}{p}\right) \prod_{\substack{p \mid (a, c) \\ p \nmid 2b}} \left(\frac{b}{p}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{d_0}\right) \left(\frac{bc/d_0^2}{d_0}\right) \prod_{\substack{p \mid (a, b) \\ p \nmid 2c}} \left(\frac{c}{p}\right) \prod_{\substack{p \mid (a, c) \\ p \nmid 2b}} \left(\frac{b}{p}\right). \end{aligned}$$

En utilisant les notations (5.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p \mid (bc, a) \\ p > 2}} (c, b)_p &= \left(\frac{-1}{d_0}\right) \left(\frac{\varepsilon_2 2^{\beta+\gamma} b' c' d_{12} d_{13}}{d_0}\right) \left(\frac{2^\gamma d_0 d_{13} d_{23} c'}{d_{12}}\right) \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta d_0 d_{12} d_{23} b'}{d_{13}}\right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta b'}{d_0 d_{13}}\right) \left(\frac{2^\gamma c'}{d_0 d_{12}}\right) \left(\frac{d_{23}}{d_{12} d_{13}}\right) (-1)^{\vartheta(d_0 d_{12}) \vartheta(d_0 d_{13})}, \end{aligned}$$

puisque la loi de réciprocité quadratique (2.5) fournit

$$\left(\frac{-1}{d_0}\right) \left(\frac{d_{12} d_{13}}{d_0}\right) \left(\frac{d_0 d_{13}}{d_{12}}\right) \left(\frac{d_0 d_{12}}{d_{13}}\right) = (-1)^{\vartheta(d_0 d_{12}) \vartheta(d_0 d_{13})}.$$

Cela implique ainsi

$$h_1(a, b, c) = \frac{1}{2^{\omega(c')}} \sum_{nn'n''n'''=c'} \mu(n'') \left(\frac{a}{n}\right) \left(\frac{b}{n'}\right) \left(\frac{ab}{n''}\right) \\ \times \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta b'}{d_0 d_{13}}\right) \left(\frac{2^\gamma c'}{d_0 d_{12}}\right) \left(\frac{d_{23}}{d_{12} d_{13}}\right) (-1)^{\vartheta(d_0 d_{12}) \vartheta(d_0 d_{13})}.$$

Puis, prenant \tilde{u} comme dans l'énoncé du lemme, nous obtenons le résultat attendu après calcul de $(\frac{nn'}{d_0 d_{12}})(\frac{d_0 d_{12}}{nn'})$ par la loi de réciprocité quadratique (2.5). \square

Lemme 5.2. — Lorsque $(a, b, c) \in S$, $f(a, b) \neq 0$ et

$$(a, b, c) = (2^\alpha u, 2^\beta v, 2^\gamma w),$$

avec u, v, w impair, on a

$$h_2(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \equiv 1 \pmod{8}, \\ 1, & \text{si } 2 \mid a \text{ et } b \equiv 1 \pmod{8}, \\ (-1)^{\vartheta(v)\vartheta(w) + \frac{\gamma(v^2-1)}{8} + \frac{w^2-1}{8}}, & \text{si } 2 \mid (a, b) \text{ et } uv \equiv 1 \pmod{8}, \\ (-1)^{\vartheta(b)\vartheta(w) + \frac{\gamma(b^2-1)}{8}}, & \text{si } a \equiv 3, 5, 7 \pmod{8} \text{ et } 1 \in \{b, ab\} \pmod{8}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Si $a \equiv 1 \pmod{8}$ alors $a \in \mathbb{Q}_2^{*2}$ et ainsi $h_2(a, b, c) = 1$. Si $2 \mid a$ et $2 \nmid b$, alors $f(a, b) \neq 0$ implique $b \equiv 1 \pmod{8}$. La formule (2.7) implique encore $h_2(a, b, c) = 1$. Si $2 \mid (a, b)$, alors $f(a, b) \neq 0$ implique $ab \equiv 4 \pmod{32}$. Donc la formule (2.7) implique le résultat. Si $a \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$, alors $f(a, b) \neq 0$ implique que b est impair et que b ou ab est congru à 1 $\pmod{8}$. Lorsque $c = 2^\gamma w$, la formule (2.7) implique le résultat. \square

Il est clair que la valeur de $h_2(a, b, c)$ ne dépend que de la valeur modulo 8 de (u, v, w) et des valuations 2-adiques α, β, γ .

Avec les notations (5.1), nous avons

$$a/(a, b) = \varepsilon_1 2^{\alpha - \min\{\alpha, \beta\}} a' d_{13}, \quad b/(a, b) = \varepsilon_2 2^{\beta - \min\{\alpha, \beta\}} b' d_{23}, \quad (a, b) = 2^{\min\{\alpha, \beta\}} d_0 d_{12}.$$

Dans la sommation (4.2), nous remplaçons $(k, k', \ell, \ell', m, m')$ par

$$(kk_{13}, k'k'_{13}, \ell\ell_{23}, \ell'\ell'_{23}, m_0m_{12}, m'_0m'_{12}),$$

tels que

$$kk' = a', \quad k_{13}k'_{13} = d_{13}, \quad \ell\ell' = b', \quad \ell_{23}\ell'_{23} = d_{23}, \quad m_0m'_0 = d_0, \quad m_{12}m'_{12} = d_{12}. \quad (5.2)$$

Lorsque $(a2^{-\alpha}, b2^{-\beta}) \equiv (a_0, b_0) \pmod{8}$ avec $(a_0, b_0) \in E_{\alpha, \beta}$, $\varepsilon_1 a > 0$, $\varepsilon_2 b > 0$ où $\varepsilon \in \{\pm 1\}^2$, la formule (4.2) s'écrit aussi

$$f(a, b) = \frac{1}{2^{\omega(2^{-\alpha-\beta}ab)}} \sum \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta \ell\ell' \ell_{23}\ell'_{23} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12}}{kk_{13}} \right) \\ \times \left(\frac{\varepsilon_1 2^\alpha kk' k_{13} k'_{13} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12}}{\ell\ell_{23}} \right) \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 2^{\alpha+\beta} kk' k_{13} k'_{13} \ell\ell' \ell_{23} \ell'_{23}}{m_0 m_{12}} \right).$$

avec $a = \varepsilon_1 2^\alpha k k' k_{13} k'_{13} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12}$ et $b = \varepsilon_2 2^\beta \ell \ell' \ell_{23} \ell'_{23} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12}$ satisfaisant (5.2). La formule (4.3) fournit alors

$$f(a, b) = \frac{1}{2^{\omega(2^{-\alpha-\beta}ab)}} \sum u(k k_{13}, \ell \ell_{23}, m_0 m_{12}) v(k, \ell, k_{13}, k'_{13}, \ell_{23}, \ell'_{23}, m_0 m_{12}, m'_0 m'_{12}) \\ \times \left(\frac{\ell'}{k} \right) \left(\frac{k'}{\ell} \right) \left(\frac{k}{\ell'_{23} m'_0 m'_{12}} \right) \left(\frac{k'}{\ell_{23} m_0 m_{12}} \right) \left(\frac{\ell}{k'_{13} m'_0 m'_{12}} \right) \left(\frac{\ell'}{k_{13} m_0 m_{12}} \right),$$

avec

$$v = v(k, \ell, k_{13}, k'_{13}, \ell_{23}, \ell'_{23}, m_0 m_{12}, m'_0 m'_{12}) \\ = \left(\frac{\ell'_{23}}{k_{13} m_0 m_{12}} \right) \left(\frac{k'_{13}}{\ell_{23} m_0 m_{12}} \right) \left(\frac{m'_0 m'_{12}}{k_{13} \ell_{23}} \right) (-1)^{\vartheta(k'_{13} m'_0 m'_{12}) \vartheta(\ell) + \vartheta(\ell'_{23} m'_0 m'_{12}) \vartheta(k)}.$$

Le paramétrage (5.2) fournit aussi

$$h_1(a, b, c) = \frac{1}{2^{\omega(c')}} \sum_{nn'n''n'''=c'} \tilde{u} \left(\frac{k k'}{nn''} \right) \left(\frac{\ell \ell'}{n' n'' m_0 m'_0 k_{13} k'_{13}} \right),$$

grâce au Lemme 5.1.

Lorsque $(a 2^{-\alpha}, b 2^{-\beta}, c 2^{-\gamma}) \equiv (u_0, v_0, w_0) \pmod{8}$ avec $(u_0, v_0) \in E_{\alpha, \beta}$, $\varepsilon_1 a > 0$, $\varepsilon_2 b > 0$ où $\varepsilon \in \{\pm 1\}^2$, nous devons donc sommer le terme

$$f(a, b) h(a, b, c) = \sum \frac{\tilde{u}_1}{2^{\omega(2^{-\alpha-\beta-\gamma}abc)}} \left(\frac{k k'}{nn''} \right) \left(\frac{\ell \ell'}{n' n'' m_0 m'_0 k_{13} k'_{13}} \right) \left(\frac{\ell'}{k} \right) \left(\frac{k'}{\ell} \right) \\ \times \left(\frac{k}{\ell'_{23} m'_0 m'_{12}} \right) \left(\frac{k'}{\ell_{23} m_0 m_{12}} \right) \left(\frac{\ell}{k'_{13} m'_0 m'_{12}} \right) \left(\frac{\ell'}{k_{13} m_0 m_{12}} \right) \\ = \sum \frac{\tilde{u}_1}{2^{\omega(2^{-\alpha-\beta-\gamma}abc)}} \left(\frac{k k'}{nn''} \right) \left(\frac{\ell \ell'}{n' n''} \right) \left(\frac{\ell'}{k} \right) \left(\frac{k'}{\ell} \right) \\ \times \left(\frac{k}{\ell'_{23} m'_0 m'_{12}} \right) \left(\frac{k'}{\ell_{23} m_0 m_{12}} \right) \left(\frac{\ell}{k_{13} m_0 m'_{12}} \right) \left(\frac{\ell'}{k'_{13} m'_0 m'_{12}} \right),$$

avec des sommations sur les entiers satisfaisant (5.2) et $c' = nn'n''n'''$, où

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(k, k', \ell, \ell', k_{13}, k'_{13}, \ell_{23}, \ell'_{23}, m_0, m'_0, m_{12}, m'_{12}) \\ = u(k k_{13}, \ell \ell_{23}, m_0 m_{12}) v(k, \ell, k_{13}, k'_{13}, \ell_{23}, \ell'_{23}, m_0 m_{12}, m'_0 m'_{12}) \\ \times \tilde{u}(n, n', n'', n''', m_0 m'_0, m_{12} m'_{12}, k_{13} k'_{13}, \ell_{23} \ell'_{23}) h_2(a, b, c).$$

Ici, nous avons

$$a = \varepsilon_1 2^\alpha k k' k_{13} k'_{13} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12}, \\ b = \varepsilon_2 2^\beta \ell \ell' \ell_{23} \ell'_{23} m_0 m'_0 m_{12} m'_{12}, \\ c = 2^\gamma n n' n'' n''' k_{13} k'_{13} \ell_{23} \ell'_{23} m_0 m'_0.$$

La sommation sur (a, b, c) s'opère de la même manière que pour $N_1(B)$. Quitte à négliger une contribution englobée dans le terme d'erreur, nous pouvons supposer que

$$m_0 m'_0 m_{12} m'_{12} \leq V, \quad k_{13} k'_{13} \leq V, \quad \ell_{23} \ell'_{23} \leq V,$$

avec $V = (\log P)^B$. Puis en appliquant le Lemme 3.3 du fait du facteur $\left(\frac{\ell'}{k}\right) \left(\frac{k'}{\ell}\right)$, nous pouvons nous restreindre au cas $k, \ell \leq V$ ou $k', \ell' \leq V$. De même, grâce au Lemme 3.3 et le facteur $\left(\frac{kk'}{nn''}\right) \left(\frac{\ell\ell'}{n'n''}\right)$, nous pouvons désormais supposer que $n, n', n'' \leq V$.

Le facteur \tilde{u}_1 ne dépend pas de k, ℓ, k', ℓ' mais seulement de leur valeur modulo 8. En fixant $(k', \ell') \equiv (k'_0, \ell'_0) \pmod{8}$, la somme sur (k', ℓ') lorsque $k, \ell \leq V$ à estimer est

$$Q \left(\frac{P}{2^\alpha m_0 m'_0 m_{12} m'_{12} k k_{13} k'_{13}}, \frac{P}{2^\beta m_0 m'_0 m_{12} m'_{12} \ell \ell_{23} \ell'_{23}}; k'_0, \ell'_0, \mathbf{d}, 8, \mathbf{q}, \chi_{q_1}, \chi_{q_2} \right), \quad (5.3)$$

avec

$$\begin{aligned} q_1 &= \ell_{23} m_0 m_{12} n n'' \ell, & q_2 &= k'_{13} m'_0 m_{12} n' n'' k, \\ d_1 &= n' n''' m'_0 m'_{12} k k_{13} k'_{13} \ell'_{23}, & d_2 &= n n''' m_0 m'_{12} k_{13} \ell \ell_{23} \ell'_{23}. \end{aligned}$$

Respectivement, en fixant $(k, \ell) \equiv (k_0, \ell_0) \pmod{8}$, la somme sur (k, ℓ) à estimer lorsque $k', \ell' \leq V$ est

$$Q \left(\frac{P}{2^\alpha m_0 m'_0 m_{12} m'_{12} k' k_{13} k'_{13}}, \frac{P}{2^\beta m_0 m'_0 m_{12} m'_{12} \ell' \ell_{23} \ell'_{23}}; k_0, \ell_0, \mathbf{d}', 8, \mathbf{q}', \chi_{q'_1}, \chi_{q'_2} \right), \quad (5.4)$$

avec

$$\begin{aligned} q'_1 &= m'_0 m'_{12} n n'' \ell'_{23}, & q'_2 &= k_{13} m_0 m'_{12} n' n'' k', \\ d'_1 &= n' n''' m_0 m_{12} k' k_{13} k'_{13} \ell_{23}, & d'_2 &= n n''' m'_0 m_{12} k'_{13} \ell \ell_{23} \ell'_{23}. \end{aligned}$$

La contribution principale provient du cas où les deux modules q_1, q_2 (resp. q'_1, q'_2) des caractères sommés sont égaux à un. Après cette sommation, il reste quatre variables à sommer $(n''', k_{13}, \ell'_{23}, m'_{12})$ (resp. $(n''', k'_{13}, \ell_{23}, m_{12})$).

Compte tenu du Corollaire 3.2, dans le premier cas, le terme principal obtenu pour l'évaluation de (5.3) est

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\substack{\ell_{23} m_0 m_{12} n n'' \ell = 1 \\ k'_{13} m'_0 m_{12} n' n'' k = 1}} \frac{\tilde{u}_2(m'_{12})}{\pi^3} \frac{\mu^2(2k_{13} \ell'_{23})}{2^{2+\alpha+\beta}} \frac{\varphi_2(k_{13} \ell'_{23} m'_{12})}{m_{12}^2 \ell'_{23} k_{13}} \frac{\mu^2(n''') \varphi_2(n''')}{2^{\omega(n''' \ell'_{23} k_{13} m'_{12})}} \left(\frac{n'''}{m'_{12}} \right) \\ & \times \frac{P^2}{\log P} \left\{ 1 + O \left(\frac{(\log 2 \ell'_{23} k_{13} m'_{12})^{\frac{3}{2}}}{\log P} \right) \right\}, \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{u}_2(m'_{12}) = (-1)^{\vartheta(m'_{12}) \vartheta(k_{13})} \left(\frac{m'_{12}}{k_{13}} \right) \left(\frac{2^\gamma \ell'_{23}}{m'_{12}} \right) h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k'_0 k_{13} m'_{12}, \varepsilon_2 2^\beta \ell'_0 \ell'_{23} m'_{12}, 2^\gamma n''' k_{13} \ell'_{23}).$$

Nous avons utilisé ici la relation $u(k_{13}, 1, 1) \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta}{k_{13}} \right) = 1$, issue de (4.4).

Ensuite nous sommons les $n''' \leq P/(2^\gamma k_{13} \ell'_{23})$ congrus à $n'''_0 \pmod{8}$ avec n'''_0 impair, premiers à $2k_{13} \ell'_{23}$ en appliquant le Lemme 3.1 avec $\nu = 2$. Nous obtenons un terme principal

$$\mathbf{1}_{m'_{12}=1} \frac{\tilde{u}_2(1)}{\pi^3} \frac{\mu^2(2k_{13} \ell'_{23})}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}} \frac{\varphi_2(k_{13} \ell'_{23}) c_2(2k_{13} \ell'_{23})}{2^{\omega(k_{13} \ell'_{23})} (k_{13} \ell'_{23})^2} \frac{P^3}{(\log P)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + O\left(\frac{(\log 2 \ell'_{23} k_{13})^{\frac{3}{2}}}{\log P} \right) \right\},$$

avec $\tilde{u}_2(1) = h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k'_0 k_{13}, \varepsilon_2 2^\beta \ell'_0 \ell'_{23}, 2^\gamma n'''_0 k_{13} \ell'_{23})$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.3. — Soient $z \in \{\pm 1\}$ et

$$\nu_2(z) = \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{(u_0, v_0) \in E_{\alpha, \beta} \pmod{8} \\ w_0 \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}} \frac{z^{\vartheta(u_0)\vartheta(v_0)}}{2^{\alpha+\beta+\gamma}} h_2(2^\alpha u_0, 2^\beta v_0, 2^\gamma w_0).$$

Alors $\nu_2(z) = 68$.

Démonstration. — Nous utilisons l'expression (4.1) pour les $E_{\alpha, \beta}$ et le Lemme 5.2 pour le calcul de h_2 . La somme $\nu_2(z)$ se décompose sous la forme suivante

$$= \begin{cases} 36, & \text{si } \alpha = 0, u_0 \equiv 1 \pmod{8}, \\ 12, & \text{si } (\alpha, \beta) = (1, 0), v_0 \equiv 1 \pmod{8}, \\ 0, & \text{si } (\alpha, \beta) = (1, 1), \\ 16, & \text{si } (\alpha, \gamma) = (0, 0), u_0 \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}, \\ 4, & \text{si } (\alpha, \gamma) = (0, 1), u_0 \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

Pour la troisième ligne, on a noté que

$$\sum_{w_0 \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*} z^{\vartheta(w_0)} (-1)^{\frac{w_0^2-1}{8}} = 0,$$

ce qui achève la démonstration. □

Ensuite, avec la notation de §3, nous avons

$$\begin{aligned} c_2(2r) &= c_2(1) \prod_{p|2r} \left(1 + \frac{1}{2(p+1)} \right)^{-1} \\ &= \frac{6}{7\sqrt{\pi}} \prod_p \left(1 + \frac{1}{2(p+1)} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{2(p+1)} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

pour un impair r . Du Lemme 5.3, il découle la formule

$$\sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ (\varepsilon_1 k'_0 k_{13}, \varepsilon_2 \ell'_0 \ell'_{23}) \in E_{\alpha, \beta} \pmod{8} \\ n'''_0 \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}} \frac{\tilde{u}_2(1)}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}} = \frac{\nu_2(1)}{4} = 17.$$

Puis enfin, nous sommes sur k_{13} et ℓ'_{23} . Nous avons

$$\sum_{k_{13}, \ell'_{23} \in \mathbb{N}} \frac{\mu^2(2k_{13}\ell'_{23})\varphi_2(k_{13}\ell'_{23})}{2^{\omega(k_{13}\ell'_{23})}(k_{13}\ell'_{23})^2} \prod_{p|k_{13}\ell'_{23}} \left(1 + \frac{1}{2(p+1)}\right)^{-1} = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p+\frac{3}{2})}\right).$$

Nous sommes donc amenés à une première contribution de (5.3) à $N_2(P)$ égale à

$$17 \times \frac{6}{7\pi^{\frac{7}{2}}} \times \frac{7}{8} \prod_p \frac{(1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{1}{p})} \left(1 + \frac{3}{2p} + \frac{1}{p^2}\right) \frac{P^3}{(\log P)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log P}\right)\right\}. \quad (5.5)$$

Nous passons maintenant à la deuxième contribution, liée à (5.4). Grâce au Corollaire 3.2, lorsque $(k, \ell) \equiv (k_0, \ell_0) \pmod{8}$, le terme principal obtenu est

$$\mathbf{1}_{\substack{m'_0 m'_{12} n n'' \ell'_{23} = 1 \\ k_{13} m_0 m'_{12} n' n'' k'_{13} = 1}} \frac{\tilde{u}_3(m_{12})}{\pi^3} \frac{\mu^2(2k'_{13}\ell_{23})}{2^{2+\alpha+\beta}} \frac{\varphi_2(k'_{13}\ell_{23}m_{12})}{m_{12}^2 \ell_{23} k'_{13}} \frac{\mu^2(n''')\varphi_2(n''')}{2^{\omega(n'''\ell_{23}k'_{13}m_{12})}} \left(\frac{n'''}{m_{12}}\right) \\ \times \frac{P^2}{\log P} \left\{1 + O\left(\frac{(\log 2\ell_{23}k'_{13}m_{12})^{\frac{3}{2}}}{\log P}\right)\right\},$$

avec

$$\tilde{u}_3(m_{12}) = (-1)^{\vartheta(\ell_0 \ell_{23} m_{12}) \vartheta(k'_{13})} u(k_0, \ell_0 \ell_{23}, m_{12}) \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta}{k'_{13}}\right) \left(\frac{2^\gamma \ell_{23} k'_{13}}{m_{12}}\right) \\ \times h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k_0 k'_{13} m_{12}, \varepsilon_2 2^\beta \ell_0 \ell_{23} m_{12}, 2^\gamma n''' k'_{13} \ell_{23}).$$

Ensuite, nous sommes les $n''' \leq P/(2^\gamma k'_{13} \ell_{23})$ congrus à $n'''_0 \pmod{8}$ avec n'''_0 impair, premiers à $2k'_{13}\ell'_{23}$ en appliquant le Lemme 3.1 avec $\nu = 2$. Nous obtenons un terme principal

$$\mathbf{1}_{m_{12}=1} \frac{\tilde{u}_3(1)}{\pi^3} \frac{\mu^2(2k'_{13}\ell_{23})}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}} \frac{\varphi_2(k'_{13}\ell_{23})c_2(2k'_{13}\ell_{23})}{2^{\omega(k'_{13}\ell_{23})}(k'_{13}\ell_{23})^2} \frac{P^3}{(\log P)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + O\left(\frac{(\log 2\ell_{23}k'_{13})^{\frac{3}{2}}}{\log P}\right)\right\}.$$

Nous avons

$$\tilde{u}_3(1) = (-1)^{\vartheta(\ell_0 \ell_{23}) \vartheta(k'_{13})} u(k_0, \ell_0 \ell_{23}, 1) \left(\frac{\varepsilon_2 2^\beta}{k'_{13}}\right) h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k_0 k'_{13}, \varepsilon_2 2^\beta \ell_0 \ell_{23}, 2^\gamma n'''_0 k'_{13} \ell_{23}) \\ = u(k_0 k'_{13}, \ell_0 \ell_{23}, 1) h_2(\varepsilon_1 2^\alpha k_0 k'_{13}, \varepsilon_2 2^\beta \ell_0 \ell_{23}, 2^\gamma n'''_0 k'_{13} \ell_{23}).$$

où nous avons utilisé la définition (4.4) de u . D'après les Lemmes 4.1 et 5.3, nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{(\alpha,\beta,\gamma) \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ (\varepsilon_1 k_0 k'_{13}, \varepsilon_2 \ell_0 \ell'_{23}) \in E_{\alpha,\beta} \pmod{8} \\ n_0''' \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}} \frac{\tilde{u}_3(1)}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}} \\
&= \sum_{(\alpha,\beta,\gamma) \in \{0,1\}^3} \sum_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ (u_0, v_0) \in E_{\alpha,\beta} \pmod{8} \\ w_0 \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*}} (-1)^{\vartheta(\varepsilon_1)\vartheta(\varepsilon_2)} \frac{(-1)^{\vartheta(u_0)\vartheta(v_0)}}{2^{4+\alpha+\beta+\gamma}} h_2(2^\alpha u_0, 2^\beta v_0, 2^\gamma w_0) \\
&= \frac{\nu_2(-1)}{8} = \frac{17}{2}.
\end{aligned}$$

Puis enfin une sommation sur k_{13} et ℓ'_{23} fournit une deuxième contribution à $N_2(P)$ égale à la moitié de (5.5).

Pour conclure, nous avons montré la formule

$$N_2(P) = \frac{153}{8\pi^{\frac{7}{2}}} \prod_p \frac{(1 - \frac{1}{p})^{\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{1}{p})} \left(1 + \frac{3}{2p} + \frac{1}{p^2}\right) \frac{P^3}{(\log P)^{\frac{3}{2}}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log P}\right)\right\}.$$

En combinant, dans (2.2), cette estimation avec (4.5), nous achevons la démonstration du Théorème 1.1.

Références

- [1] M. Bhargava, A positive proportion of plane cubics fail the Hasse principle. *En préparation*, 2012.
- [2] R. de la Bretèche et T.D. Browning, Density of Châtelet surfaces failing the Hasse principle. *Soumis*, 2012. ([arXiv:1210.4010](#))
- [3] J.-L. Colliot-Thélène, Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes de tores. *Soumis*, 2012. ([arXiv:1210.3644](#))
- [4] J. Friedlander et H. Iwaniec, Ternary quadratic forms with rational zeros. *J. Théor. Nombres Bordeaux* **22** (2010), 97–113.
- [5] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. reine angew. Math.* **327** (1981), 12–80.
- [6] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Collection SUP : Le Mathématicien, 2, Presses Universitaires de France, Paris, (1970) 188 pp.

R. DE LA BRETECHE, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Denis Diderot, Case Postale 7012, F-75251 Paris CEDEX 13, France • *E-mail* : breteche@math.jussieu.fr

T.D. BROWNING, School of Mathematics, University of Bristol, Bristol, BS8 1TW, United Kingdom
E-mail : t.d.browning@bristol.ac.uk